EL ANALISIS AXIOMATICO DE PROBLEMAS DISTRIBUTIVOS:
CONSIDERACIONES ETICAS EN UN MARCO FORMALIZADO

Salvador Barberá

En este trabajo se describen los rasgos generales de la teoría del arbitraje y de la teoría de juegos cooperativos. Ambas se toman como ejemplos de un modo de razonamiento habitual en economía normativa, consistente en caracterizar axiomáticamente posibles métodos para evaluar o resolver conflictos colectivos. Basándome en estos ejemplos, argumento que el tratamiento axiomático constituye una valiosa ayuda para ordenar la reflexión en torno a problemas éticos, y para incorporar consideraciones éticas a planteamientos normativos más generales.

1. Introducción

El objetivo de estas notas es reflexionar sobre los límites y las posibilidades de ciertos modelos axiomáticos que interesan a los economistas, como posible apoyo para plantear y debatir problemas normativos, y más en concreto para introducir consideraciones éticas en el discurso económico.

Es un hecho que muchos resultados en economía normativa adoptan la siguiente forma: se describe un marco formal, en cuyo seno cabe definir clases de reglas, se identifican listas de propiedades que aquéllas pueden o no satisfacer, y se caracterizan reglas concretas en términos del conjunto de propiedades que cumplen de forma exclusiva. Veamos algunos ejemplos.

El estudio axiomático de las medidas de desigualdad analiza reglas que le atribuyen un índice de desigualdad a cada distribución de rentas, identifica sus posibles propiedades (ser o no sensible a determinadas transferencias de ricos a pobres, por ejemplo), y caracteriza distintas medidas (el índice de Gini, pongamos). El análisis normativo de índices de pobreza admitiría una descripción muy análoga[1].

El estudio axiomático de los funcionales de bienestar social estudia reglas que a cada nivel de utilidad de los distintos agentes de una sociedad le hacen corresponder un cierto nivel de bienestar colectivo, se propone diversas restricciones que un funcional podría o no satisfacer (tener o no en cuenta la información cardinal contenida en aquellos valores de utilidad, o respetar la unanimidad...), y termina por caracterizar diversas reglas de elección colectiva (el utilitarismo o el leximin, por ejemplo), o bien por señalar la incompatibilidad entre listas suficientemente extensas de requisitos que, aunque deseables uno a uno, pueden

[1] Véase ATKINSON, A. (1981): *La economía de la desigualdad*, Ed. Crítica, y SEN, A. (1979): *Sobre la desigualdad económica*, Ed. Crítica.

Universidad Autónoma de Barcelona

no ser compatibles entre sí (como ocurre con el famoso teorema de imposibilidad de Arrow)[2].

En las dos secciones que siguen me centraré en dos clases de modelos que también se ajustan a esta misma descripción general, y que se utilizan en particular para reflexionar sobre problemas de reparto, en cuya trascendencia desde un punto de vista ético no voy a insistir. Procuraré explicitar el tipo de cuestiones que atraen a quienes diseñan, analizan o simplemente consumen estos modelos, y argumentar que su utilización juiciosa puede ser útil desde puntos de vista teóricos y prácticos.

Antes de empezar, me permitiré un breve comentario sobre método. Es seguro que un resultado de caracterización o de imposibilidad, como los que generan las teorías de las que voy a tratar, no puede en ningún caso referirse directamente a fenómenos reales. Con esto liquidamos falsos problemas de realismo. Más bien hay que verlo como reflexión sobre nuestras construcciones teóricas, que son los filtros a través de los cuales pensamos en la realidad. Así, por ejemplo, la axiomatización del índice de Gini es una forma rigurosa, y a mi entender muy útil, de darnos cuenta de qué estamos haciendo al identificar el fenómeno real de la desigualdad distributiva con su medición a través de aquel instrumento, y no de otro. El realismo de los modelos que paso a comentar no es, pues, una cuestión. Espero, en cambio, argumentar en favor de su utilidad e interés como herramientas para pensar, en general, y para debatir temas de alcance ético, en particular.

2. Modelos de arbitraje[3]

Empezamos por considerar una amplia literatura que estudia soluciones a conflictos entre agentes desde un punto de vista axiomático. Como veremos, se trata de identificar posibles compromisos que un árbitro imparcial, ajeno al conflicto, pudiera defender como justos. Es por esto que los llamaré modelos de arbitraje[4].

Un problema de arbitraje viene descrito formalmente por tres datos: 1) el conjunto de los agentes involucrados, $I = [1, 2, \ldots, n]$; 2) un punto de desacuerdo $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, que indica la utilidad d_i que obtendrá cada agente i si no se produce un acuerdo entre todos ellos, y 3) un conjunto de vectores utilidad, S. Cada punto u en S viene descrito por n niveles de utilidad $(u_1, u_2, \ldots u_n)$, y se entiende que si u pertenece a S es porque resulta posible un acuerdo entre los n agentes que, de alcanzarse, haría que la utilidad de cada uno de ellos fuese precisamente u_i *(para* $i = 1, 2, \ldots, n$*)*. La teoría del arbitraje modeliza la búsqueda sistemática a la que podría proceder un árbitro, expresando: 1) en qué consiste una solución; 2) qué propiedades podrían considerarse deseables; y 3) la medida en que resulta posible que una solución satisfaga una combinación adecuada de propiedades. Si entendemos el desacuerdo como un posible acuerdo, tendremos que d pertenece a S. Claramente, para que la colaboración entre agentes tenga interés, deben existir repartos de utilidad posibles, u, que le den a cada agente una utilidad mayor que la correspondiente al punto de desacuerdo.

Esta descripción encierra ya, en sí misma, algunas limitaciones. La principal es que no nos dice nada respecto a las posibles consecuencias de acuerdos parciales. Se examinan solamente casos en que, o bien hay un acuerdo total, o no hay acuerdo. Pese a esta limitación, el modelo cubre muchas situaciones de interés. Una de ellas es el caso de conflicto entre dos agentes. Como ejemplo con n agentes, podemos considerar el problema del reparto de un patrimonio que deba hacerse por unanimidad entre

[2] Véase ARROW, K. (1974): *Elección social y valores individuales*, Instituto de Estudios Fiscales, y SEN, A. (1986): «Social choice Theory», en Arrow e Intrigilator (Eds), *Handbook of Mathematical Economics*, North Holland.

[3] ROTH, A. (1979): *Axiomatic Models of Bargaining*. Springer-Verlag, y THOMSON, W., (1990): *Bargaining Theory: the axiomatic approach*, Academic Press, son excelentes textos sobre este tema.

[4] Otro nombre posible es el de modelos de regateo, traducción directa del término inglés «bargaining models». Pero creo que refleja peor la naturaleza de las soluciones axiomáticas propuestas.

las partes, y que pasa a terceras manos de no producirse acuerdo[5].

Dado un problema concreto *(S, d)*, podemos preguntarnos si un reparto de utilidades u es *adecuado*, dadas las posibilidades de cooperación S y las consecuencias d de no cooperar. Esta formulación nos obliga a tomar cierta perspectiva: *¿adecuado* en qué sentido? Pues bien, la mejor manera de interpretar el análisis axiomático de problemas de arbitraje consiste en adoptar el punto de vista de un árbitro profesional, de alguien llamado a seleccionar y defender una propuesta concreta de reparto de utilidades, aportando argumentos en favor de la propuesta.

Una *solución* a una familia F de problemas de negociación es una regla que a cada problema *(S, d)* perteneciente a F le asigna un vector de utilidades $f(S, d) = (u_1, u_2,..., u_n)$.

Una solución puede valorarse según diversos criterios, y cada criterio puede expresarse como un axioma sobre posibles soluciones. Algunos de los axiomas se refieren a la solución que, en cada caso, se vaya a dar al problema considerado. Veamos dos de ellos:

a) *Simetría.* Supongamos que *(S, d)* sea un problema simétrico, en el siguiente sentido: 1) si hay desacuerdo, todos los agentes reciben igual utilidad, y 2) si hay un acuerdo posible en que i recibe u_i, y j recibe u_j, también es posible un acuerdo en que los demás agentes siguen igual, i recibe u_j, y j recibe u_i. Una solución satisface el axioma de simetría si para cualquier problema simétrico en la familia de problemas F, atribuye la misma utilidad a todos los agentes.

b) *Eficiencia.* Dado un problema de arbitraje *(S, d)*, un reparto de utilidades $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ es eficiente si es posible (está en S), y ningún otro reparto posible proporciona mayor utilidad a algún agente sin disminuir la de ningún otro. Una solución satisface el axioma de eficiencia si escoge un reparto de utilidades eficiente para cualquier problema de la familia de problemas F.

[5] Véase la sección siguiente, en que ampliamos el modelo para permitir acuerdos parciales.

La referencia a una *familia o clase de problemas* F es relevante porque bajo ciertas especificaciones de F los requisitos anteriores carecerían de interés. Por ejemplo, si admitimos situaciones en las cuales ninguna solución puede ser eficiente, resulta absurdo imponer el axioma de eficiencia. Si nos planteamos problemas simétricos en que ninguna asignación simétrica sea eficiente, sabemos de antemano que exigir los axiomas de eficiencia y simetría resulta excesivo. Para evitar estas situaciones, se suelen imponer condiciones sobre la clase de problemas a considerar. A partir de ahora, suponemos que F es el conjunto de problemas en que S es convexo y cerrado. La segunda condición es estrictamente técnica. La convexidad de S admite interpretaciones más sustanciosas que veremos más adelante.

Un segundo bloque de axiomas se refiere al modo en que varían los repartos de utilidad entre agentes cuando se comparan dos problemas relacionados entre sí. Consideremos tres de ellos:

c) *Independencia de la escala de medida (IEM).* Consideremos un problema de arbitraje *(S, d)*. La distribución propuesta por una solución f será $u = f(S, d)$. Consideremos otro problema de arbitraje *(S', d')* obtenido del primero mediante las siguientes operaciones. Para cada agente i, escojamos un número cualquiera a_i y otro número b_i, este positivo. El nuevo punto de desacuerdo d' se obtiene a partir de d haciendo que, para cada agente i, $d'_i = a_i + b_i d_i$. El nuevo conjunto de utilidades posibles se obtiene a partir de S haciendo que u' pertenezca a S' si y sólo si existe algún reparto u en S tal que, para todo agente i, $u'_i = a_i + b_i u_i$. Observemos que el paso de *(S, d)* a *(S', d')* puede interpretarse como la reformulación del mismo problema de arbitraje, con la única diferencia de que han cambiado las escalas de medida. Si antes un agente obtenía u_i ahora obtiene $a_i + b_i u_i$, debido a que se ha desplazado en $-a_i$ el origen desde el que se medía la utilidad de i, y se ha dividido por b_i la unidad de medida adoptada. Pues bien, el axioma de independencia de la escala de medida exige que, en términos reales, estas transformaciones de escala carezcan de importancia. Es decir, que el reparto de utilidades correspondiente al nuevo problema *(S', d')* sea, simplemente, el reparto correspondiente a *(S, d)* pero expresado en términos de las nuevas unidades de medida. Más formalmente, que f_i *(S', d')* = $a_i + b_i f_i$ *(S, d)*.

d) *Independencia de repartos no escogidos (IRNE).* Consideremos dos problemas de arbitraje *(S, d)* y *(S', d)*, que sólo se diferencian en que *S* contiene a *S'*. Es decir, *S'* contempla menos posibilidades de reparto de utilidades. Para una solución *f*, supongamos que *f (S, d)* pertenece a *S'*. Es decir, que el reparto de utilidades propuesto para *(S, d)* sigue siendo posible en *(S', d)*. El axioma de IRNE exige de *f* que, en tales circunstancias, se siga escogiendo el mismo reparto, es decir que *f (S', d) = f (S, d)*. Con este axioma se demanda de la solución un grado de coherencia análogo al que se supone de un consumidor racional: si una elección es adecuada cuando existen muchas opciones, lo debe seguir siendo ante un conjunto de posibilidades menor pero que nos siga permitiendo escoger lo que antes era bueno.

e) *Monotonía de recursos (MR).* Consideremos dos problemas de arbitraje *(S, d)* y *(S', d)* tales que *S* es un subconjunto de *S'*. Esto supone que todos los repartos de utilidad posibles en *S* lo siguen siendo en *S'*, y que *S'* permite, además, otras posibilidades. El axioma de monotonía de recursos exige que, en tal caso, ningún agente se vea perjudicado por la aparición de nuevas posibilidades. Es decir, que la utilidad f_i *(S', d)* que le corresponde a cada agente en *(S', d)* sea al menos tan grande como la utilidad f_i *(S, d)*, que obtendría en *(S, d)*.

Volvamos ahora al problema de nuestro árbitro. Supongamos que, enfrentado a una situación de conflicto *(S, d)*, propone una distribución de utilidades ***u*** *= f (S, d)*, obtenida al aplicar la solución *f* al caso concreto que le ocupa. Su argumentación ante las partes, en defensa de la distribución propuesta, podría basarse en exhibir una lista de las «virtudes» del método de solución aplicado. Más que defender, una a una, las propuestas para cada caso concreto, un árbitro debería defender la bondad de su método de solución de conflictos como tal método, como regla sistemática de aplicación general.

El siguiente paso, en esta literatura, consiste en *caracterizar* reglas de solución a problemas de arbitraje. Es decir, identificar exactamente la forma en que se solucionaría cada problema concreto (describir una regla), establecer una lista de propiedades deseables que dicha regla satisface y demostrar que dicha regla constituye, de hecho, la *única* forma de proceder que nos garantizaría el cumplimiento de aquellas propiedades. Como ejemplo concreto de esta forma de proceder, consideremos dos reglas que han sido muy estudiadas.

La primera regla, propuesta por J. Nash, consiste en seleccionar aquel reparto de utilidades que maximice el producto de las ganancias de utilidad obtenidas por cada agente, respecto a la que obtendría en caso de no producirse acuerdo. ¿Multiplicar utilidades? ¿Qué sentido tiene esto? La respuesta se encuentra en el resultado de caracterización correspondiente. *La regla de Nash es la única regla de arbitraje que satisface las propiedades de eficiencia, simetría, independencia de la escala de medida e independencia de repartos no escogidos.* Esto zanja muchas discusiones, aunque deja otras abiertas. Si queremos aplicar reglas que satisfagan aquellas propiedades, no hay más que hablar: habrá que recurrir a la regla de Nash. Si, por el contrario, consideramos que la aplicación de dicha regla es un error, el propio análisis axiomático nos sugiere vías sistemáticas para argumentar nuestra postura negativa, o para adelantar propuestas alternativas. Por ejemplo, la crítica a cualquiera de los axiomas se convierte directamente en una crítica al sistema propuesto por Nash. Y la propuesta de cualquier otro método puede basarse en la contraposición de las propiedades exhibidas por éste con aquellas que hemos identificado con el de Nash.

Un segundo procedimiento digno de mención es el propuesto por Kalai y Smorodinski. Estos autores observan que, dado un problema de arbitraje, podemos identificar las aspiraciones de cada agente con la máxima utilidad que podría recibir en caso de que el acuerdo alcanzado, dentro de *S*, fuese el más favorable para él. Con esta definición está claro que, salvo en casos triviales donde no hace ninguna falta un árbitro, las aspiraciones máximas de todos los agentes no podrán verse todas ellas satisfechas simultáneamente. Sin embargo, el vector u^* de aspiraciones constituye un punto de referencia atractivo desde el punto de vista de un árbitro. *La solución de Kalai y Smorodinski consiste en seleccionar aquel compromiso eficiente en S para el cual las ganancias de utilidad de los agentes (respecto al punto de desacuerdo) sean proporcionales a las que habrían obtenido (también respecto a d), si hubiera sido posible satisfacer íntegramente las aspiraciones de cada uno.* Desde el punto de vista axiomático, esta regla se distingue de la anterior en que no satisface la independencia de repartos no escogidos, mientras que sí satisface, en cambio, el axioma de monotonía de recursos, que puede violarse al aplicar la regla de Nash. Concretamente, *la regla de Kalai y Smorodinski es la única regla que satisface simultáneamente los axiomas de eficiencia, simetría, independencia de la escala de medidas y monotonía de recursos.*

Aprovechando estas dos caracterizaciones, que no son sino el inicio de una larga lista de resultados dentro de la teoría axiomática de la negociación, podemos reflexionar sobre el uso del análisis axiomático para debatir posturas éticas ante problemas económicos.

Ante todo, destaquemos *el carácter no universal* de cualquier propuesta que pueda derivarse del análisis. Todas ellas dependen del marco de referencia, y sólo quedan plenamente justificadas dentro de él. ¿Cuáles son, pues, las limitaciones implícitas en nuestro marco de referencia? Una primera es que la información relevante para arbitrar se halla contenida íntegramente en los datos disponibles, referidos todos ellos a utilidades. Implícitamente se está adoptando una actitud consecuencialista, según la cual sólo importan las consecuencias finales, en términos de utilidad, para los agentes involucrados, y no la forma en que se han alcanzado. Aun aceptando este marco general, los resultados propuestos se refieren a clases de problemas en que S es convexo. Esta hipótesis técnica, como ya hemos apuntado, puede defenderse satisfactoriamente con referencia a ciertas interpretaciones del proceso real de conflicto que se está modelizando, y no tan bien en otros casos. En un proceso de arbitraje a veces tiene sentido recurrir a repartos aleatorios: por ejemplo, echar a suertes entre distintos herederos qué lote les corresponde entre varios con valor de mercado análogo, o asignar mediante loterías los apartamentos de un complejo residencial construido con subvenciones públicas, entre quienes desean adquirirlos. Allí donde el posible resultado arbitral pueda ser una lotería entre compromisos posibles, y no sólo una solución cierta, resulta natural suponer que S es convexo y que las utilidades de las que estamos hablando son del tipo de Von Neuman y Morgenstern. En este caso, el axioma de independencia de escala de medida adquiere todo su sentido y puede verse prácticamente como un requisito de coherencia. Si, en cambio, la naturaleza del problema a resolver impidiese la introducción de soluciones arbitrales que recurran, de modo razonable, al azar, el marco de esta teoría resultaría más que discutible técnicamente.

Ya hemos mezclado, en esta discusión, aspectos relativamente técnicos con otros de naturaleza más ética. Etico: ¿podemos limitarnos a las consecuencias de un proceso de negociación, y olvidarnos del proceso que conduce a sus consecuencias finales? Técnico: ¿tiene sentido suponer que los conjuntos de negociación S son convexos? Etico: ¿es aceptable en nuestro contexto, recurrir al azar como parte del proceso de avance hacia un arbitraje satisfactorio? Técnico: si las utilidades de los agentes reflejan sus preferencias sobre loterías, ¿satisfacen o no los requisitos de Von Neuman y Morgenstern, en cuyo caso más nos valdrá limitarnos a soluciones que respeten la independencia de escala de medida?

Este *flujo y reflujo entre condiciones con raíces éticas y sus expresiones más técnicas* impide separaciones totalmente nítidas. Lo formal, además de reflejar condiciones deseadas, acaba imponiendo limitaciones en nuestros análisis que más vale explicitar, porque pueden desbordar desde lo técnico hacia implicaciones que limiten o modifiquen el contenido ético de nuestras proposiciones. No sé si es posible deslindar una cosa y otra. Ni lo intentará aquí, ni lo he visto logrado en la literatura que conozco. Sabiéndolo, lo mejor es procurar *analizar con detalle cada modelo, cada regla, cada propiedad,* y entender lo mejor posible qué nos dice.

No todos los axiomas normativos propuestos en la literatura sobre arbitraje tienen una raíz ética. Basta mencionar la condición de eficiencia, que carece totalmente de contenido ético, aunque resulte atractiva por otras razones. En cambio, propiedades como la de simetría o la de monotonía de recursos sí parecen reflejar condiciones defendibles desde un punto de vista ético. La simetría refleja una voluntad de tratamiento igual entre iguales (dejando abiertos, todo hay que decirlo, otros interrogantes: ¿cómo podemos asegurarnos de que dos agentes son iguales en un sentido relevante, sobre la base exclusiva de ciertas funciones de utilidad?, ¿qué tipos de desigualdades se admitirán entre desiguales?). La monotonía de recursos refleja una voluntad de coherencia entre los derechos reconocidos a cada parte en situaciones distintas, pero relacionadas entre sí. Cualesquiera que fueran estos derechos, plasmados en la utilidad que cada uno reciba en una situación determinada, no parece que la ampliación de las posibilidades abiertas ante la misma sociedad debiera conducir a un tratamiento peor de ninguna de las partes.

La interpretación de las soluciones como reglas de arbitraje plantea la posibilidad de utilizar los resultados de esta literatura como reflexiones sobre cómo alcanzar compromisos «justos». Espero haberle dado al lector, con este primer ejemplo, una medida de las limitaciones del modelo concreto, pero también de las posibilidades que se abren para reflexionar ordenada y rigurosamente mediante el uso del procedimento axiomático.

3. Juegos cooperativos[6]

En los modelos de arbitraje sólo se describen las posibles consecuencias de la cooperación entre todos los agentes, y de la ausencia total de cooperación. Esto puede constituir una limitación cuando se trate de analizar situaciones en las que los agentes, si les conviene, pueden adoptar acuerdos parciales, en los que una parte de ellos adopten medidas, sin contar con los demás, conducentes a un reparto de utilidades cierto e independiente de las acciones que puedan emprender quienes no entran en el trato. En tales condiciones quedaría bien definido el conjunto de repartos de utilidad posibles para cada subgrupo o coalición de agentes. Esta es precisamente la información de base en un juego cooperativo en forma coalicional (o característica).

Dado un conjunto de agentes *N*, un juego en forma coalicional para *N* vendrá dado por una función que a cada subconjunto no vacío *B* de *N*, es decir, a la coalición posible, le asigne un conjunto *S (B)* de vectores, que se interpretan como los niveles de utilidad que los agentes de *B* pueden alcanzar mediante acuerdos que ellos, independientemente de los demás agentes, están en condiciones de adoptar. Con esta definición general queremos poner de relieve que el modelo considerado por la teoría de la negociación puede verse como un caso particular de juego en forma coalicional, en que el punto de desacuerdo *d* tenga como coordenadas lo que le corresponde en el juego a cada individuo por sí mismo (sin cooperar), y donde implícitamente se supone, al no expresarlas, que las utilidades alcanzables por cooperación entre coaliciones que no comprendan la totalidad del grupo son las mismas que si no se coopera.

Las preguntas naturales ante este modelo son análogas a las planteadas en el caso de arbitraje, aunque aquí se abren otras nuevas. ¿Qué resultados serían «razonables», en algún sentido a definir, ante una situación en que distintos agentes, cuyas posibilidades de cooperación vienen bien descritas por un juego en forma coalicional, se plantean qué hacer? ¿Qué coaliciones llegarán a acuerdos y, por tanto, qué grado de cooperación es de esperar? ¿Cómo se repartirán las ganancias de esta cooperación en-

[6] El reciente texto de MOULIN, H. (1988): *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University Press, contiene una amplia panorámica de los modelos a los que nos referimos, y de muchos otros. El lector también puede consultar los trabajos relevantes en el número 40 de *Cuadernos de ICE*, 1988, dedicado monográficamente a la teoría de juegos.

tre los miembros de las coaliciones que llegen a un acuerdo?

El análisis de juegos tan generales no resulta sencillo. Existe, por fortuna, una versión más simple, que admite una interpretación clara, relevante en muchos contextos, y en cuyo seno vamos a situarnos, desde ahora, para hacer nuestros comentarios. Son los *juegos en forma coalicional con utilidad transferible.*

Se trata, de atribuirle a cada coalición B un número v *(B)*, que interpretamos ahora como la cantidad de utilidad o (a estos efectos, y para simplificar) de dinero que la coalición puede garantizarse mediante acuerdo entre sus miembros. Implícitamente, este único dato nos describe el correspondiente conjunto S de utilidades alcanzables como el de aquellos vectores que sumen v *(B)*.

Si tenemos un juego en forma coalicional con utilidad transferible *(N, v)*, ¿qué repartos son adecuados?; ¿qué coaliciones son previsibles? No tenemos espacio para reproducir la teoría cooperativa de juegos en estas páginas, ni tan sólo para esbozarla en paralelo a nuestra presentación anterior de la teoría de la negociación. Me limitaré a señalar algunos rasgos generales, antes de entrar en comentarios sobre el alcance ético de esta teoría.

1) De nuevo, no existen afirmaciones con validez universal. En un juego en que el valor v *(N)* sea inferior al valor v *(B)*, donde B es un subconjunto del total de agentes N, no habrá razón para que los miembros de B cooperen con los demás. Si, en cambio, el valor máximo de los beneficios conjuntos se alcanza mediante la cooperación plena, entonces parece que ésta se impone, siempre que encontremos reglas adecuadas de reparto de las ganancias derivadas de esta cooperación. Dichos repartos podrán tener en cuenta lo que, de romperse la cooperación podrían las partes por sí mismas; son datos de referencia incluso si aquella ruptura no se produce. De ahí que existan distintas clasificaciones de los juegos (subaditivos, superaditivos, convexos, etcétera) según cuál sea la relación entre los valores de las distintas coaliciones. Cada afirmación teórica y cada caracterización dependen del conjunto de juegos que previamente hayamos acotado mediante nuestras hipótesis. Los comentarios que siguen no entran en detalles sobre estos puntos.

2) Dado un juego en forma coalicional con utilidad transferible podemos volver a adoptar la óptica del *arbitraje.* La diferencia será sólo que, en este caso, disponemos de más datos (sabemos los resultados para cada colaboración parcial), y que nuestro marco es más estrecho (suponemos que existe un medio de pago que todos los agentes involucrados valoran por igual). En este caso, la pregunta es, de nuevo, si existen reglas satisfactorias que, para cada situación concreta dentro de una clase (es decir, para cada juego posible) nos determinen cuanto le debería corresponder a cada agente. Una regla que resuelva el problema de reparto es lo que se llama un *valor.* Cada regla, de nuevo, podrá o no satisfacer determinadas propiedades deseables. Y se buscará, mediante teoremas de caracterización, identificar qué reglas son las que satisfacen, de manera única, conjuntos de axiomas que un árbitro imparcial pudiera esgrimir como argumentos en favor de su fórmula de reparto.

Ejemplos de soluciones, en este contexto, son el *valor de Shapley y el nucleolo.* Me limitaré a algunos comentarios sobre el valor de Shapley. Este se define del siguiente modo: dado un juego en que la coalición global maximiza la ganancia global, consideremos todas las secuencias en las que los distintos agentes hubiesen podido irse incorporando, uno tras otro, a dicha coalición total. Para cada secuencia S, el agente i se incorpora en un momento dado. Sea B *(S, i)* la coalición a la que se incorpora i en dicha secuencia. El valor $v\,(B\,[S,\,i] \cup \langle i \rangle) - v\,(B\,[S,\,i])$ *representa la contribución marginal de i* a B *(S, i)*; es decir, lo que la coalición puede lograr, con su ayuda, por encima de lo que conseguiría sin ella. Pues bien, *el valor de Shapley le atribuye a cada individuo, para cada juego, la media de sus contribuciones marginales a cada una de las posibles secuencias en las que hubiese podido formarse la coalición total* (que es, efectivamente, la que conviene formar) ¿Qué virtudes tiene este método? Puede caracterizarse mediante los siguientes axiomas:

a) *Pago nulo a jugadores nulos.* Si un agente no añade nunca nada a las posibilidades de ninguna coalición, no recibirá nada.

b) *Pago igual a jugadores equivalentes.* Si dos agentes añaden siempre lo mismo uno que otro a cualquier coalición a la que se incorporan, deben recibir igual pago.

c) *Aditividad.* Dados dos juegos *(N, v)* y *(N, v')* entre los mismos jugadores, la suma de los repartos resultantes para cada uno debe ser igual al reparto que le correspondería en el juego suma *(N, v + v')*. Este axioma puede interpretarse como una garantía de que la forma en que se nos presenten formalmente las posibilidades de cooperación no afecte artificialmente la forma de reparto. Si un grupo puede cooperar en dos tareas, y lo que cada coalición puede darse a sí misma haciendo las dos es siempre igual a la suma de lo que se daría haciendo por separado, una y otra, debe ser irrelevante si se recompensan ambas tareas conjunta o separadamente.

d) *Eficiencia.* La suma de los pagos a los distintos jugadores es igual a las ganancias de la coalición.

Pues bien, *el valor de Shapley es el único valor (la única solución a juegos en forma coalicional con utilidad transferible) que satisface los axiomas a), b), c) y d).*

Una vez más, este teorema puede servirnos para reflexionar sistemáticamente. Dada la interpretación arbitral, cabe preguntarse si los axiomas que describen el procedimiento reflejan, o no, propiedades deseables. Más concretamente, puede analizarse el posible contenido ético de cada uno. La eficiencia d) no lo tiene. La aditividad puede ser garantía frente a presentaciones oscuras e interesadas de las verdaderas posibilidades de cooperación, si bien en su versión formal aparece más bien como un requisito técnico. Los axiomas a) y b), en cambio, sí tienen una interpretación ética concreta. Y, de nuevo, serán más o menos atractivos según la situación específica que analicemos. Así, darle nada a quien no contribuye nada parece perfectamente aceptable en determinados contextos, y totalmente inaceptable en otros. Cada lector encontrará ejemplos abundantes en uno y otro sentido.

3) En vez de adoptar una perspectiva axiomática y buscar «compromisos defendibles», un juego puede analizarse desde *perspectivas más estratégicas,* pensando más en los resultados probables de la interacción entre agentes, que en su posible justificación ética o normativa. Desde este otro punto de vista, la «solución» más habitual para juegos en forma condicional viene dada por la noción de núcleo. Sin entrar en definiciones formales, diremos simplemente que *el núcleo es el conjunto de repartos que podrían considerarse «estables», porque ninguna coalición podría alinear a la vez a todos sus miembros en contra de dicho reparto.* En general, no hay razón para que los repartos en el núcleo sean únicos: puede haber muchos, o ninguno. Tampoco hay razón para que, en general, los repartos «razonables» (el valor de Shapley, por ejemplo) coincidan con los «estables» (los del núcleo). Estas no coincidencias pueden resolverse en ciertas clases de juegos, y no en otras. Su mención nos permite apuntar a un dilema cuyo planteamiento justificaría, en sí mismo, todo este formalismo: *¿hasta qué punto vale la pena plantearse soluciones «justas» a problemas de reparto, si no es de esperar que sean «estables»?* ¿Debemos o no aceptar como restricción, al definir objetivos desde puntos de vista éticos, el que nuestra propuesta pueda ser frágil, o simplemente inviable, debido a que, por buena que sea, puede ser bloqueada porque atenta contra el interés de quien puede evitarla? O, por el contrario, ¿debemos separar estas condiciones de factibilidad de nuestro discurso normativo y confiar en que el carácter razonable de nuestras propuestas nos permitirá imponerlas, incluso allí donde invadan los ámbitos de poder, o incluso de derechos, de los agentes afectados?

Para cambiar de lenguaje, podemos ver el núcleo de un juego como el conjunto de repartos hacia los que convergen los incentivos de los agentes. En cambio, soluciones normativas como el valor de Shapley nos llevan a propuestas defendibles en términos más alejados de criterios de comportamiento. Nuestro dilema puede plantearse así: *¿deben o no las restricciones de incentivos incorporarse a una definición de justicia?* Si hay que escoger entre una solución absolutamente justa, pero poco viable, y otra que es la menos injusta entre las absolutamente viables, ¿qué es mejor?

No tengo respuesta, desde luego, pero sí señalaría que este tipo de cuestiones hace especialmente importantes aquellos análisis que nos permitan identificar situaciones en las que el conflicto sea inevitable, y separarlas de otras en las que pueda evitarse. Así, teoremas aparentemente técnicos, como el que nos dice que el valor de Shapley de un juego convexo está siempre en su núcleo, adquieren un sentido mucho más atractivo: nos señalan un territorio (acaso reducido, claro) en el que parecen reconciliables principios normativos y consideraciones de incentivos y de poder.

4) Los juegos en forma coalicional con utilidad transferible tienen un ámbito de aplicación reducido, debido a las hipótesis que subyacen a su propia formulación. Pero conviene también señalar que pueden valer para analizar muchos problemas de importancia. Muchos aspectos de reparto de poder en cuerpos legislativos pueden formularse en estos términos. La imputación de los costes de una explotación común entre sus distintos beneficiarios también genera un juego coalicional, y surge en ámbitos muy diversos: ¿cómo repartir los costes de un aeropuerto entre distintas líneas aéreas?, ¿cómo distribuir los impuestos con que financiar una obra hidráulica entre los sectores de actividad que saldrán beneficiados por ella: agricultura, navegación, generación de energía, etcétera? ¿cómo distribuir las ganancias entre los miembros de un equipo heterogéneo que ha ganado un premio? Ninguno de los problemas mencionados parece, en sí mismo, de suficiente envergadura para apelar a la Justicia, con mayúscula. Y, sin embargo, la gracia de tener soluciones para problemas concretos, o al menos propuestas defendibles por vías bien definidas y en términos rigurosos es precisamente poner de relieve que estas *soluciones parciales, y su acumulación, son la única forma de avanzar.* Pretender análisis universales es perder el tiempo, posiblemente. Nuestras afirmaciones son relativas a modelos concretos, en el mejor de los casos. *Entender sus limitaciones es tan importante como obtener su máximo rendimiento analítico.* Utilizar sus consecuencias formales para acercarnos crítica y prudentemente a los problemas reales es, posiblemente, lo mejor que podemos hacer. Hacerlo bien, sacarle partido a una forma de pensar, empieza por entender sus limitaciones. En todo caso, queda la esperanza de que, al acumular modelos diversos, cada uno con sus limitaciones, vayamos entendiendo lo que tienen de común, y quepa descubrir principios generales aplicables a todos ellos. De hecho, y volviendo a nuestros ejemplos, esto ha sido así. Los ingenieros de la Tenesse Valley Authority diseñaron métodos de imputación de costes de sus obras hidráulicas sin saber teoría de juegos, y los aeropuertos tuvieron que poner tarifas desde que hubo aviones. Ninguno esperó a que se desarrollase una teoría abstracta sobre arbitraje y reparto. Es reconfortante pensar que, ahora que existe, puede ser útil para entender mejor los criterios de justicia subyacentes en aquellas propuestas, y ayudar también a sugerir como cambiarlos, si es necesario.

5) Al referirnos al conflicto potencial entre «estabilidad» y «justicia», ejemplificados por el núcleo y el valor de Shapley, respectivamente, estábamos hablando a título de ejemplo. Y no sólo porque el valor de Shapley, como hemos dejado claro, no es más que una solución entre otras, con sus pro y sus contra, y por tanto no puede identificarse íntegramente con una solución «justa» más que en la medida en que lo expresan sus propiedades. Sino porque, cambiando nuestro punto de vista, también podemos interpretar las asignaciones en el núcleo desde una perspectiva normativa. Esto es lo que, con otro lenguaje, han venido haciendo los autores que, siguiendo a Sen[7], han examinado la llamada paradoja del «liberal paretiano». En efecto, al discutir un juego en forma coalicional, hemos indicado lo que puede darse cada coalición actuando por su cuenta. Tras esta expresión va-

[7] «The impossibility of a Paretian Liberal», *Journal of Political Economy,* 1970. Existe traducción española en *Hacienda Pública,* volúmen 44, 1977. Los artículos de SEN, contenidos en la parte IV de su libro *Choice, Welfare and Measurement,* MIT Press, 1982, y el ya citado *Social Choice Theory* (cf. nota 2), resumen muchas aportaciones que siguieron a aquel trabajo original.

ga, «lo que puede darse» se encierran varias interpretaciones posibles. El poder de cada coalición puede tener orígenes muy diversos. Puede provenir de meras consideraciones de fuerza, en cuyo caso su posible ejercicio no tendrá mayor contenido ético, aunque puede ser pertinente tener en cuenta la amenaza que representa para cualquier solución que no las respete. Pero hay otra interpretación más interesante, desde el punto de vista ético, y es la que parte de considerar «lo que puede darse» cada coalición como expresión de sus *derechos*. En esta interpretación, si un reparto no se encuentra en el núcleo es porque alguna coalición, apelando a sus derechos, puede oponerse a ella. El núcleo adquiere así un sentido normativo, como conjunto de asignaciones capaces de respetar simultáneamente los derechos de cada individuo y de cada grupo. La literatura sobre el «liberal paretiano», en la formulación de Sen, pone de relieve la posibilidad de que, para ciertas atribuciones de derechos individuales, su ejercicio simultáneo pueda chocar con la eficiencia de los repartos alcanzados. En nuestro lenguaje, esto equivale a señalar que el núcleo de un juego puede ser vacío. En efecto, la condición de eficiencia le reconoce al conjunto de los agentes el derecho a cambiar todo reparto por otro que les sea más favorable a todos ellos. Este derecho «paretiano» será incompatible con todos los demás que puedan recogerse en la forma coalicional, si ocurre que ningún compromiso está en el núcleo y, por tanto, los respeta a todos.

La regla de Kalai y Smorodinski es la única regla que satisface simultáneamente los axiomas de eficiencia, simetría, independencia de la escala de medida y monotonía de recursos

No quiero simplificar en exceso, al reducir la rica literatura sobre los posibles conflictos entre derechos individuales y eficiencia a una simple observación sobre el núcleo. Pero quería mencionar esta relación para observar que *la posible interpretación, en términos normativos, de una solución a un juego cooperativo* (en este caso, el núcleo), *no sólo depende del significado que le demos a los axiomas que lo caracterizan, sino también del sentido que atribuyamos a los propios datos del problema.* En nuestro caso los orígenes y la legitimidad que le atribuyamos a la distribución de poder representada a través de la forma coalicional hará del núcleo un concepto con mayor o menor interés normativo.

4. Conclusión

He procurado describir, sintéticamente, dos marcos de análisis axiomático, y el tipo de preguntas que se plantean en su seno. Al hilo de esta descripción han surgido diversas afirmaciones que intento resumir. Una, que la propia formulación de los marcos de análisis impone límites al alcance de cualquier conclusión. Dos, que aun dentro de dichos marcos suelen añadirse hipótesis adicionales que permitan alcanzar resultados. Tres, que a pesar de estas limitaciones, el análisis axiomático permite organizar la comparación entre soluciones alternativas a problemas de reparto, distinguir entre sus distintas propiedades y debatir el posible contenido ético de cada una. Cuatro, que los debates e interpretaciones en torno al significado normativo y las posibles implicaciones prácticas de cada solución deben ser enormemente prudentes, porque el interés de cada axioma puede variar según el contexto, y la propia interpretación de los datos de partida, del modelo mismo, puede teñir de mayor a menor interés normativo una misma afirmación formal. En definitiva, que los modelos son puntos de partida, a los que hay que dotar de contenidos semánticos que, por sí mismos no nos pueden proporcionar. Cinco, que en el marco de dichos modelos podemos formular cuestiones de gran alcance. Citaré sólo dos, como ejemplo: si debemos o no dar prioridad, al buscar soluciones justas, a consideraciones de incentivos; y el conflicto latente entre los derechos individuales y los de grupo, entre libertad y eficiencia. Seis, que aunque no llegásemos a resolver estos grandes temas, existen problemas concretos, como los de reparto de costes o los de distribución de poder en cuerpos representativos, a cuya solución pueden aplicarse con bastante inmediatez las soluciones propuestas por la literatura axiomática. Y que esta contribución a la solución de problemas concretos es la mejor forma de avanzar hacia planteamientos más generales. Estaremos en mejores condiciones de debatir lo que es justo en general si disponemos de ideas claras y bien definidas sobre cuáles son las soluciones justas a muchos problemas concretos, por limitados que sean.

Para terminar, y aunque no haya insistido en ello previamente, quiero destacar que, a mi entender, el economista no debe limitarse, ni se limita de hecho, a hacer recomendaciones alternativas para que el político elija entre ellas. Dejando de lado si debe o no, por tratarse de una opinión más personal, insistiré en que, de hecho, no lo hace. La literatura axiomática que he descrito supone que son posibles las comparaciones interpersonales de bienestar, y las hace sin pedir excusas a nadie. Ni las prescripciones, tan antiguas, de Robbins, ni sus expresiones cansadas y de oficio en tantos libros de texto, han impedido el florecimiento de áreas de investigación en las que economistas de todo tipo y nivel intentan entender cómo pueden ser los compromisos entre agentes, supongan o no juicios de valor[8]. El único límite respetado, o que debería respetarse, es que toda información se exprese de tal modo que sus fundamentos, discutibles o no, sean explícitos, para que su valor, su aplicabilidad y su interés puedan ser objeto de un debate ordenado. A partir de ahí, allá cada cual con su responsabilidad.

[8] Esta era la tesis defendida en mi trabajo, ya antiguo, con GARCIA BERMEJO, J. C. «Prohibiciones metodológicas y economía del bienestar», en el número 3-4 de *Cuadernos de ICE*, dedicado monográficamente a temas metodológicos.